Lezioni di Calcolo Numerico
Lezione 08: Sistemi lineari

Alberto Tibaldi

6 maggio 2018

Indice

4 La fattorizzazione LU

Abbiamo concluso la precedente sezione introducendo uno dei concetti più potenti e secondo me interessanti nell'ambito della soluzione dei sistemi lineari. La nostra intenzione iniziale era infatti semplicemente trasformare un generico sistema lineare con matrice associata $\underline{\underline{A}}$ in un sistema triangolare superiore con matrice associata $\underline{\underline{U}}$. Tuttavia, abbiamo scoperto che, salvando i coefficienti m_{ik} (di fatto un sottoprodotto delle eliminazioni di Gauss) in una matrice $\underline{\underline{L}}$, che abbiamo visto essere triangolare inferiore, abbiamo ottenuto la possibilità di fattorizzare una matrice in termini di un prodotto tra una matrice triangolare inferiore e di una triangolare superiore: la fattorizzazione LU. Dopo aver aggiunto alcuni dettagli su una sua variante, procederemo con lo studio delle sue applicazioni in vari contesti.

4.1 Pivoting parziale: fattorizzazione PA = LU

Nella precedente sezione abbiamo visto che i coefficienti m_{ik} van calcolati con la formula

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},$$

che, nel caso $a_{kk}^{(k)} = 0$, dà luogo a una divisione per zero. Allora, nell'esercizio che abbiamo risolto passo-passo per comprendere l'algoritmo, non abbiamo trovato il caso $a_{kk}^{(k)} = 0$; abbiamo tuttavia detto che, nel caso questo si fosse verificato, avremmo dovuto scambiare la k-esima riga con la prima riga successiva i tale per cui $a_{ik}^{(k)} \neq 0$ (e abbiamo detto che questa **deve** esistere, altrimenti la matrice avrebbe determinante nullo e il sistema non avrebbe una soluzione unica).

Cercando a questo punto di ragionare più *numericamente*, diciamo che $a_{kk}^{(k)}$ potrebbe essere non proprio zero, ma *piccolo*; in questo caso, potremmo comunque andare incontro a dei problemini, dal momento che *dividere per un numero piccolo è un po' come moltiplicare per un numero grande* e, insomma, potremmo comunque avere una qualche sorta di problema di instabilità numerica. Per questo motivo, anche se $a_{kk}^{(k)} \neq 0$, può essere opportuno effettuare comunque uno scambio atto a migliorare la stabilità numerica. In particolare, potremmo pensare di scambiare la k-esima riga con la r-esima tale per cui

$$\left|a_{rk}^{(k)}\right| = \max_{k \leq i \leq n} \left|a_{ik}^{(k)}\right|,$$

ossia, si sostituisce alla k-esima riga la riga successiva, così denominata r-esima, tale per cui l'elemento è il massimo; in questo modo, si sta dividendo per il più grande numero possibile, evitando quindi divisioni per numeri, se non pari a zero, vicini a esso. Volendo considerare un esempio, una matrice tipo

$$\underline{\underline{A}}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 12 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

non richiederebbe pivoting parziale al primo passo dell'algoritmo, dal momento che l'elemento $a_{1,1}$ è già il più grande (in modulo) della sua colonna. Se invece avessimo avuto una matrice nella forma

$$\underline{\underline{A}}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & 10 & 12 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

sarebbe stato conveniente scambiare la prima riga con la seconda, in modo da avere il 5 come elemento **pivot**.

Questa strategia viene detta **pivoting parziale**, dove con il termine **pivot** si intende l'elemento $a_{kk}^{(k)}$, ovvero l'elemento su cui fa perno l'algoritmo delle eliminazioni di Gauss per procedere[1].

Si può dimostrare che il pivoting è superfluo in alcune situazioni, in particolare:

- quando la matrice di sistema $\underline{\underline{A}}$ è a diagonale dominante per colonne;
- quando la matrice di sistema $\underline{\underline{A}}$ è simmetrica definita positiva.

E se tutti i *candidati pivot* fossero piccoli rispetto agli altri elementi della matrice? Cioè, se fossero tutti diversi da zero, ma tutti piccoli? Beh, questo significherebbe che il sistema è mal condizionato! Infatti, dire che un'intera colonna ha elementi non proprio pari a 0, ma comunque molto piccoli, significherebbe che il determinante della matrice non sarebbe proprio 0, ma sarebbe molto piccolo. Di conseguenza, l'inversa di questa matrice sarà mal definita e, in generale, potrebbe essere molto grande[2]. Ma quindi il numero di condizionamento, che ricordiamo essere definito come

$$\kappa(\underline{\underline{A}}) = \left\|\underline{\underline{A}}\right\| \left\|\underline{\underline{A}}^{-1}\right\|,$$

avrà la seconda norma molto grande, e quindi di conseguenza anche il numero di condizionamento sarà grande.

Per concludere, proponiamo una rappresentazione sintetica di quanto abbiamo appena descritto, sia che lo scambio di righe derivi dalla situazione $a_{kk}^{(k)} = 0$, sia che derivi dall'applicazione della strategia del pivoting parziale. Un sinonimo di *scambiare*, quando parlo delle righe, è *permutare*. Non è che lo stia dicendo perché io voglia fare in qualche modo concorrenza al prof. Tullio De Mauro, quanto per ricordarvi che ho recentemente parlato del concetto di **matrice di permutazione** $\underline{\underline{P}}$. Ricordo che una matrice di permutazione, moltiplicata da sinistra, permette di scambiare gli elementi di un vettore o -allo stesso modo- le righe di una matrice. Questo significa

[1] La parola **pivot** deriva dalla traduzione in lingua francese della parola **perno**; viene usata molto spesso anche in ambito sportivo, come nella pallamano o nella pallacanestro. Il pivot, nel basket di una volta, era l'elemento chiave della squadra; si pensi per esempio ai tempi di Kareem Abdul-Jabbar, di Hakeem Olajuwon o del più recente Shaquille O'Neal: giocatori alti grossi e forti che tirano da sotto canestro. Credo che questo ruolo inteso in questo modo sia andato un po' perduto anche perché le squadre puntano più sul tiro da tre punti piuttosto che su un attacco da sotto canestro.

[2] si ricordi che nel calcolo della matrice inversa è contenuto il reciproco del determinante

che possiamo assumere che $\underline{\underline{P}}$ contenga tutte le operazioni di permutazione da effettuare al fine di migliorare il nostro metodo numerico.

Gli elementi della fattorizzazione LU di una matrice $\underline{\underline{A}}$ si possono determinare, con MATLAB®, mediante il comando

```
[L,U,P] = lu(A);
```

4.2 Applicazioni della fattorizzazione PA = LU

Una volta descritto cosa sia questa fattorizzazione, vogliamo spiegare a cosa serve. Vediamo quindi un po' di applicazioni.

4.2.1 Soluzione di un sistema lineare

Si immagini di dover risolvere il sistema lineare

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b},$$

e di avere, grazie al comando `lu` di MATLAB®, le matrici $\underline{\underline{P}}$, $\underline{\underline{L}}$, $\underline{\underline{U}}$. Ciò che possiamo fare è quindi, partendo da questa espressione del sistema lineare, moltiplicare da sinistra per la matrice di permutazione $\underline{\underline{P}}$, ottenendo

$$\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{\underline{P}}\,\underline{b}.$$

Dal momento che $\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}}$, è possibile modificare il membro sinistro:

$$\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}}\,\underline{x} = \underline{\underline{P}}\,\underline{b}.$$

A questo punto, guardiamo con calma questo sistema. Possiamo dire che $\underline{\underline{U}}\,\underline{x}$ è un vettore colonna; volendogli dare un nome, chiamiamolo $\underline{y}$; allo stesso modo, $\underline{\underline{P}}\,\underline{b}$ è un vettore colonna, che possiamo per esempio chiamare $\underline{c}$:

$$\underline{y} \triangleq \underline{\underline{U}}\,\underline{x} \qquad \underline{c} \triangleq \underline{\underline{P}}\,\underline{b}. \tag{1}$$

Quindi, il sistema si può riscrivere come

$$\underline{\underline{L}}\,\underline{y} = \underline{c}. \tag{2}$$

Come accennato qualche sezione fa, in MATLAB®il comando \ permette di risolvere un sistema lineare nella forma $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, che guarda caso è proprio quella appena scritta. Usando dunque il comando

```
y = L\c;
```

possiamo risolvere il sistema triangolare inferiore (2) trovare il vettore $\underline{y}$. A questo punto, però, possiamo ricordare le definizioni (1), che scrivono che

$$\underline{\underline{U}}\,\underline{x} = \underline{y},$$

dove però ora $\underline{y}$ è noto dalla soluzione di (2). Quindi, possiamo usare il comando MATLAB®

```
x = U\y;
```

per trovare la soluzione del sistema di partenza.

Riassumendo, una volta calcolata la fattorizzazione PA = LU, che come abbiamo visto ha un costo computazionale circa pari a $n^3/3$, abbiamo a disposizione i due fattori triangolari. Con un po' di manipolazioni abbiamo quindi capito che, **una volta noti questi due fattori**, il sistema lineare si può risolvere **mediante la soluzione di due sistemi triangolari**, ciascuno dei quali ha costo computazionale circa pari a $n^2/2$, ottenendo quindi alla fine solo un costo pari a n^2, che è decisamente meglio di $n^3/3$.

Il comando \, nella sua apparente banalità, è strutturato in maniera molto intelligente, dal momento che prima trova l'algoritmo ottimo per il problema, e poi agisce. Nel caso più generale, applica la decomposizione PA = LU. Nel caso appena proposto, capisce che $\underline{\underline{L}}$ e $\underline{\underline{U}}$ sono matrici triangolari, e quindi utilizzerà il metodo delle sostituzioni in avanti/indietro.

4.2.2 Soluzione di più sistemi lineari con stessa matrice

Un buon osservatore potrebbe obiettare che se non avessimo assunto per ipotesi di conoscere i fattori $\underline{\underline{P}}$, $\underline{\underline{L}}$, $\underline{\underline{U}}$, avremmo potuto risolvere questo esercizio scrivendo direttamente il comando

```
x = A\b;
```

senza farci tutte queste domande e tutti questi conti sulla fattorizzazione, dal momento che MATLAB®li fa già internamente. Esistono però situazioni in cui capita di dover risolvere p sistemi caratterizzati dalla stessa matrice $\underline{\underline{A}}$, che dunque differiscono solo per il termine noto[3]. In questa situazione

- se usassi p volte il comando `x_i = A\b_i` farei calcolare a MATLAB le eliminazioni di Gauss ogni volta; in questo modo, il costo computazionale complessivo sarebbe $pn^3/3$, ossia p volte quello delle eliminazioni di Gauss;

- se invece calcolassi una volta la fattorizzazione LU (mediante eliminazioni di Gauss, ovviamente) e poi la tenessi in memoria e la utilizzassi per risolvere $2p$ sistemi triangolari (per ogni sistema bisogna risolvere 2 sistemi triangolari, come spiegato nella precedente sezione), il costo computazionale complessivo sarebbe $n^3/3 + pn^2$. Questo significa che se p è piccolo, ovvero se non ho molti sistemi lineari (o se hanno dimensione n grossa), è come risolvere solo 1 sistema lineare anziché p :-) .

4.2.3 Calcolo del determinante di una matrice

Come già anticipato, la regola di Laplace non è il metodo più da *pane e volpe* che ci sia per calcolare il determinante di una matrice $\underline{\underline{A}}$. Tuttavia, esiste almeno una situazione in cui calcolare il determinante diventa cosa facile: il caso in cui la matrice è triangolare. Infatti, è possibile dimostrare, applicando la regola di Laplace, che il determinante di una matrice triangolare è semplicemente dato dal prodotto degli elementi della diagonale principale[4]. Come possiamo sfruttare questo fatto?

Il nostro obiettivo finale è calcolare $\det\{\underline{\underline{A}}\}$. Tuttavia, per raggiungerlo, poniamoci l'obiettivo di calcolare, al suo posto, $\det\{\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}}\}$, dove $\underline{\underline{P}}$ è la solita matrice di permutazione ottenuta mediante la fattorizzazione LU. Dall'Algebra Lineare, si sa che il determinante del prodotto di due matrici è pari al prodotto dei determinanti:

$$\det\{\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}}\} = \det\{\underline{\underline{P}}\}\det\{\underline{\underline{A}}\}. \tag{3}$$

In tutto questo, però, il determinante della matrice $\underline{\underline{P}}$ può essere uguale a -1 o a $+1$. Infatti, $\underline{\underline{P}}$ è ottenuta a partire dalla matrice identità $\underline{\underline{I}}$ (la quale ha determinante pari a $+1$), permutando un certo numero di righe. Come noto dall'Algebra Lineare, ogni volta che si permutano le righe di una matrice, il suo determinante cambia segno e, quindi, a seconda del numero di permutazioni, esso può valere ± 1. Se il numero di permutazioni effettuato è pari, allora $\det\{\underline{\underline{P}}\} = +1$; se dispari, $\det\{\underline{\underline{P}}\} = -1$. Considerando il seguente esempio di matrice

$$\underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

si può vedere a occhio che questa è stata ottenuta dalla matrice identità permutando la seconda e la terza riga, e quindi il numero di permutazioni s è pari a 1.

A questo punto riprendiamo (4) e sostituiamo il membro destro come segue:

$$\det\{\underline{\underline{P}}\}\det\{\underline{\underline{A}}\} = (-1)^s \det\{\underline{\underline{A}}\} = \det\{\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}}\} = \det\{\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}}\} = \det\{\underline{\underline{L}}\}\det\{\underline{\underline{U}}\},$$

quindi, portando il termine di segno al membro destro,

$$\det\{\underline{\underline{A}}\} = (-1)^s \det\{\underline{\underline{L}}\}\det\{\underline{\underline{U}}\}.$$

[3]un esempio pratico verrà mostrato nell'ambito della stima numerica degli autovalori di una matrice

[4]la stessa cosa vale *ovviamente* anche per le matrici diagonali

A questo punto, sfruttiamo il fatto che le matrici $\underline{\underline{L}}$ e $\underline{\underline{U}}$ sono triangolari, e questo permette di scrivere più esplicitamente il determinante come prodotto dei termini sulla diagonale:

$$\det\{\underline{\underline{A}}\} = (-1)^s \det\{\underline{\underline{L}}\} \det\{\underline{\underline{U}}\} = (-1)^s \left(\prod_{i=1}^{n} l_{ii}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} u_{ii}\right).$$

Ricordiamo infine che la matrice $\underline{\underline{L}}$ ha tutti gli elementi della diagonale principale pari a 1 e, quindi, il suo determinante è pari a 1. Questo permette di concludere il nostro calcolo ottenendo

$$\det\{\underline{\underline{A}}\} = (-1)^s \prod_{i=1}^{n} u_{ii}. \tag{4}$$

4.2.4 Calcolo dell'inversa di una matrice

Il calcolo dell'inversa di una matrice $\underline{\underline{A}}$ non è certamente più semplice del calcolo del determinante: si pensi anche solo al fatto che il calcolo dell'inversa richiede il calcolo del determinante! ;-) Ammesso che dunque qualcuno dei lettori abbia *davvero* un buon motivo per invertire una matrice[5], la soluzione di questo problema ci è di nuovo fornita dalla fattorizzazione LU. Al fine di determinare $\underline{\underline{A}}^{-1}$, proviamo quindi a partire da

$$\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}},$$

e proviamo a calcolare l'inversa di entrambi i membri, ottenendo

$$\left(\underline{\underline{P}}\,\underline{\underline{A}}\right)^{-1} = \left(\underline{\underline{L}}\,\underline{\underline{U}}\right)^{-1}.$$

A questo punto, dall'Algebra Lineare, dovrebbe essere noto che, quando calcolo l'inversa del prodotto di due matrici $\underline{\underline{A}}$ e $\underline{\underline{B}}$, ottengo

$$\left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}\right)^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\underline{\underline{A}}^{-1},$$

ossia, oltre a invertire i singoli fattori, devo scambiarli di ordine. Questo ci porta a riscrivere la precedente espressione come

$$\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{P}}^{-1} = \underline{\underline{U}}^{-1}\underline{\underline{L}}^{-1}.$$

A questo punto, moltiplichiamo a destra ambo i membri per $\underline{\underline{P}}$, ottenendo

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{U}}^{-1}\underline{\underline{L}}^{-1}\underline{\underline{P}},$$

che è il metodo con cui MATLAB®calcola l'inversa di una matrice `A` quando lanciamo il comando `inv(A)`. Questa operazione, per quanto più vantaggiosa rispetto alle tecniche insegnate nell'ambito dell'Algebra Lineare, ha costo computazionale pari a n^3, esattamente come il prodotto righe per colonne di due matrici. Per questi motivi, è sconsigliabile passare per il calcolo della matrice inversa al momento di risolvere un sistema lineare.

4.3 Esempio: trasmissione del calore

Al fine di dare un po' di *feeling* in più su queste cose, e capire che non servono solo per fare sterili conticini di Matematica, proviamo a risolvere un esercizietto di Fisica in cui la fattorizzazione LU può essere utile.

Si consideri il muro di un'abitazione, rappresentato graficamente in Fig. 1. Note le temperature esterna e interna, nonché le caratteristiche del muro, vogliamo calcolare le temperature alle varie interfacce tra materiali diversi. Problema attualissimo, viste tutte le storie sulle certificazioni energetiche che si fanno così spesso ;-)

Visto che questo non è un testo di Fisica ma di Calcolo Numerico, il problema è un po' semplificato. Vi basti sapere che il flusso di calore q è definito come

[5] e questo non è per niente scontato, come ci dice John Cook su `https://www.johndcook.com/blog/2010/01/19/dont-invert-that-matrix/`

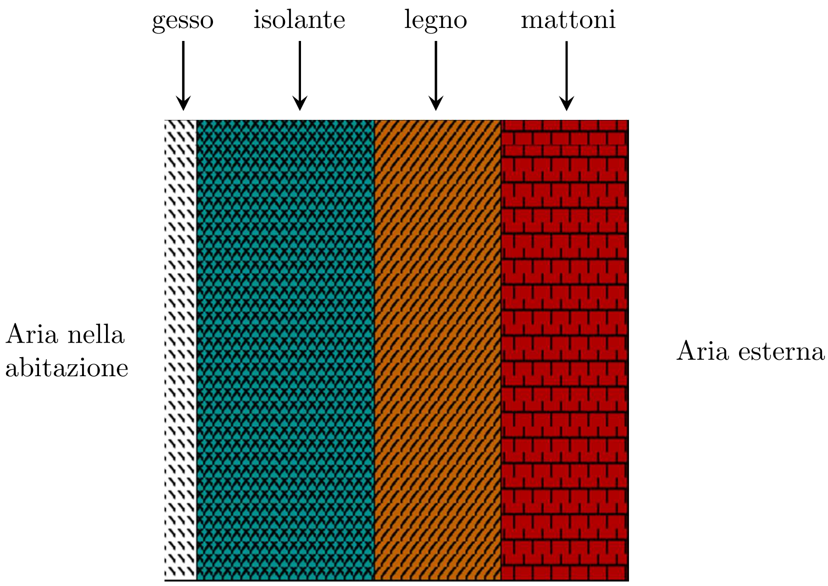

Figura 1: Rappresentazione grafica del muro utilizzato come caso di studio.

$$q = \frac{\Delta T}{R}, \tag{5}$$

dove le resistenze termiche sono

$$\underbrace{R_1 = 0.036\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}}_{\text{gesso}} \quad \underbrace{R_2 = 4.01\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}}_{\text{isolante}} \quad \underbrace{R_3 = 0.408\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}}_{\text{legno}} \quad \underbrace{R_4 = 0.038\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{W}}}_{\text{mattoni}}.$$

L'esercizio si può risolvere ipotizzando che la temperatura interna all'abitazione, T_{int}, e quella esterna, T_{est}, rimangano costanti, e quindi che il flusso termico sia costante[6]. Quindi, imponendo che (5) sia costante lungo tutto il muro, otteniamo le relazioni

$$\frac{T_{\mathrm{int}} - T_1}{R_1} = \frac{T_1 - T_2}{R_2} = \frac{T_2 - T_3}{R_3} = \frac{T_3 - T_{\mathrm{est}}}{R_4}.$$

Concentriamoci sulla prima equazione:

$$\frac{T_{\mathrm{int}} - T_1}{R_1} = \frac{T_1 - T_2}{R_2}.$$

Questa si può riscrivere, con un po' di conticini algebrici, come:

$$R_2 T_{\mathrm{int}} - R_2 T_1 = R_1 T_1 - R_1 T_2,$$

in cui l'unico termine completamente noto è quello contenente T_{int}, e quindi, raccogliendo e mettendo in ordine le incognite, possiamo scrivere

$$(R_1 + R_2)T_1 - R_1 T_2 = T_{\mathrm{int}} R_2. \tag{6}$$

Procediamo in maniera simile per la seconda eguaglianza:

$$\frac{T_1 - T_2}{R_2} = \frac{T_2 - T_3}{R_3} \Longrightarrow R_3 T_1 - R_3 T_2 = R_2 T_2 - R_2 T_3,$$

[6] per avere più dettagli leggete qualche testo di Fisica Tecnica o Termodinamica

che si può riscrivere come

$$R_3T_1 - (R_2 + R_3)T_2 + R_2T_3 = 0. \tag{7}$$

Infine, per l'ultima eguaglianza, si scrive

$$\frac{T_2 - T_3}{R_3} = \frac{T_3 - T_{\text{est}}}{R_4} \Longrightarrow R_4T_2 - R_4T_3 = R_3T_3 - R_3T_{\text{est}},$$

che si può riscrivere come

$$R_4T_2 - (R_3 + R_4)T_3 = -R_3T_{\text{est}}. \tag{8}$$

A questo punto, le tre equazioni trovate, (6), (7) e (8), costituiscono un sistema lineare:

$$\begin{cases} (R_1 + R_2)T_1 - R_1T_2 = R_2T_{\text{int}} \\ R_3T_1 - (R_2 + R_3)T_2 + R_2T_3 = 0 \\ R_4T_2 - (R_3 + R_4)T_3 = -R_3T_{\text{est}}, \end{cases} \tag{9}$$

che si può scrivere anche in forma matriciale:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} R_1 + R_2 & -R_1 & 0 \\ R_3 & -(R_2 + R_3) & R_2 \\ 0 & R_4 & -(R_3 + R_4) \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_2T_{\text{int}} \\ 0 \\ -R_3T_{\text{est}} \end{bmatrix}}_{\underline{b}}.$$

Questo sistema si può risolvere con facilità mediante MATLAB®. In particolare però diciamo che da bravi certificatori energetici appassionati di Calcolo Numerico decidiamo di simulare l'andamento delle varie temperature del muro per varie stagioni; questo significherebbe risolvere il problema per diversi valori di T_{int} e T_{est}. Dal momento che *il muro è sempre lo stesso*, e quindi le R_i sono considerabili costanti, dal momento che la matrice di sistema $\underline{\underline{A}}$ contiene solamente le R_i, è possibile calcolarne la fattorizzazione LU una volta sola, e quindi risolvere per diversi termini noti, corrispondenti a diverse temperature interne/esterne, dei sistemi non generici, ma sempre triangolari.

Si propone ora uno script MATLAB®implementante la soluzione del problema.

```
clear
close all
clc

Tint = [20  20 20 20]; % vettore delle temperature interne da simulare
Test = [-10 -5  5 10]; % vettore delle temperature interne da simulare

% Resistenze termiche del muro
R(1) = 0.036; % resistenza termica gesso, K/W
R(2) = 4.01; % resistenza termica isolante, K/W
R(3) = 0.408; % resistenza termica legno, K/W
R(4) = 0.038; % resistenza termica mattoni, K/W

% Matrice di sistema
A = [R(1)+R(2)     -R(1)          0;
     R(3)       -(R(2)+R(3))      R(2);
      0              R(4)    -(R(3)+R(4))];

% Posso calcolare la fattorizzazione LU una tantum
[L,U,P] = lu(A);

for ind=1:length(Tint)
    % Scrivo il termine noto per le temperature di interesse
    b = [Tint(ind)*R(2);0;-Test(ind)*R(3)];
    %
    % Risolvo il sistema esterno, quello che produce il vettore "y":
    c = P*b;
    y = L\c;
    %
    % Risolvo il sistema interno, per ottenere la soluzione
    x = U\y;
    %
    % Salvo per esempio la temperatura alla prima interfaccia
    q(ind) = (Tint(ind)-x(1))/R(1);
end
```

```
figure
grid on
hold on
plot(Test,q)
```

Si noti che non è necessario svolgere così tanti passaggi per la soluzione di ciascun sistema; in questo codice, questo è stato fatto solo per questioni pedagogiche. In particolare, il listato

```
c = P*b;
y = L\c;
x = U\y;
```

si può rimpiazzare semplicemente con

```
y = L\(P*b);
x = U\y;
```

o, in modo ancora più compatto, con

```
x = U\(L\(P*b));
```

Queste alternative non sono né meglio né peggio della prima: sono un po' più compatte.

5 La fattorizzazione di Choleski

Nella precedente sezione abbiamo discusso ed esplorato in lungo e in largo la fattorizzazione PA = LU. Tra le varie cose che abbiamo visto, abbiamo detto (e non dimostrato) che il numero di operazioni necessarie per il calcolo dei fattori $\underline{\underline{P}}$, $\underline{\underline{L}}$ e $\underline{\underline{U}}$ è $n^3/3$, dove n come al solito è il numero di righe o colonne della matrice di sistema.

Tuttavia, se la matrice $\underline{\underline{A}}$ che intendiamo fattorizzare fosse simmetrica definita positiva, sarebbe possibile fattorizzarla non solo con la PA = LU, ma anche con un metodo diverso, detto **fattorizzazione di Choleski**. Questa fattorizzazione permette di scrivere la matrice $\underline{\underline{A}}$ come

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{R}},$$

ossia in termini del prodotto della trasposta di una certa matrice $\underline{\underline{R}}$, moltiplicata da sinistra a $\underline{\underline{R}}$. In particolare, $\underline{\underline{R}}$ è una matrice triangolare superiore avente elementi positivi sulla diagonale principale. Il motivo per cui questa fattorizzazione è particolarmente interessante è che, oltre a basarsi su un singolo fattore (la matrice $\underline{\underline{R}}$) anziché 3 (le matrici $\underline{\underline{P}}$, $\underline{\underline{L}}$, $\underline{\underline{U}}$), il costo computazionale necessario per calcolarla è $n^3/6$ operazioni anziché $n^3/3$: metà rispetto alla fattorizzazione PA = LU ! MATLAB®permette di calcolare anche questa fattorizzazione per una matrice `A` simmetrica definita positiva, mediante il comando

```
R = chol(A)
```

5.1 Applicazioni della fattorizzazione di Choleski

5.1.1 Soluzione di un sistema lineare

Dato un sistema lineare nella solita forma $\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b}$, dove però $\underline{\underline{A}}$ è una matrice simmetrica definita positiva, è possibile risolverlo utilizzando la fattorizzazione di Choleski. A questo fine, a partire da

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{x} = \underline{b},$$

sostituiamo $\underline{\underline{A}}$ con la sua fattorizzazione:

$$\underline{\underline{R}}^{\mathrm{T}}\underbrace{\underline{\underline{R}}\,\underline{x}}_{\underline{y}} = \underline{b},$$

in cui abbiamo implicitamente definito $\underline{y}$ come il prodotto tra la soluzione $\underline{x}$ (che ancora non conosciamo) e $\underline{\underline{R}}$. A questo punto, possiamo riscrivere il sistema come

$$\underline{\underline{R}}^{\mathrm{T}}\,\underline{y} = \underline{b},$$

che si può risolvere mediante il comando \ come

```
y = R'\b; % si noti R', dal momento che bisogna farlo per R trasposta!
```

Questo ci ha permesso di ottenere il vettore $\underline{y}$. Ora, utilizzando la definizione

$$\underline{\underline{R}}\,\underline{x} = \underline{y},$$

si può calcolare la soluzione del sistema finale con il comando

```
x = R\y;
```

5.1.2 Calcolo dell'inversa di una matrice

Dovendo calcolare l'inversa di una matrice $\underline{\underline{A}}$ simmetrica definita positiva, è possibile utilizzare la fattorizzazione di Choleski al posto della LU. Infatti, ricordando che

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{R}},$$

è possibile scrivere

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \left(\underline{\underline{R}}^{\mathrm{T}}\underline{\underline{R}}\right)^{-1} = \underline{\underline{R}}^{-1}(\underline{\underline{R}}^{\mathrm{T}})^{-1} = \underline{\underline{R}}^{-1}\left(\underline{\underline{R}}^{-1}\right)^{\mathrm{T}},$$

in cui abbiamo usato le proprietà delle matrici inverse discusse precedentemente, e scambiato l'operazione di inversione con quella di trasposizione.

Il vantaggio di questo modo di procedere consiste nella possibilità di calcolare semplicemente l'inversa di $\underline{\underline{R}}$ (che è triangolare superiore) invece che dell'intera matrice, trasporre l'inversa, e moltiplicare; in questo modo, il costo del metodo è solo $2n^3/3$, invece di n^3 operazioni.